www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS SPECIAL de RECRUTEMENT aux GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES
Option T'-Math 3

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

Dans l'espace euclidien orienté, rapporté à un espace orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère une nappe paramétrée orientée Σ, définie par une application $(u,v)\mapsto \overrightarrow{OM}(u,v)$ de classe C^∞. On suppose que Σ est régulière à l'ordre 1, c'est-à-dire que $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}$ ne s'annule pas, et on note $\vec{n}$ le vecteur normal à Σ.

Soit Γ un arc de courbe orienté tracé sur Σ, défini par $t\mapsto\overrightarrow{OP}(t)=\overrightarrow{OM}(u(t),v(t))$, où $t\mapsto u(t)$ et $t\mapsto v(t)$ sont de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose que Γ est régulier à l'ordre 2, c'est-à-dire que, pour tout t, $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\wedge\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\neq\vec{0}$. On note $t\mapsto s(t)$ une abscisse curviligne de Γ, définie par $\frac{ds}{dt}=\left\|\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right\|$, $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la tangente à Γ au point P et $\vec{N}$ le vecteur unitaire de la normale principale à Γ en ce point.

On dit que Γ est une <u>géodésique</u> de Σ si, en tout point P de Γ, le plan osculateur à Γ est perpendiculaire au plan tangent à Σ en ce point.

Si Γ est un arc rectiligne régulier à l'ordre 1, on convient encore de dire que Γ est une géodésique de Σ.

1. <u>Caractérisation géométrique des géodésiques.</u>

Soit Γ un arc régulier à l'ordre 2 tracé sur Σ. Montrer que Γ est une géodésique si et seulement si, en tout point P de Γ, la normale principale à Γ est la normale à Σ en ce point.

2. <u>Application : géodésiques de la sphère.</u>

On suppose que Σ est la sphère de centre O et de rayon R. Les cercles de centre O et de rayon R sont appelés grands cercles de Σ.

a) Montrer que si Γ est un arc de grand cercle, Γ est une géodésique de Σ.

b) Réciproquement, soit Γ une géodésique de Σ. Montrer que $\overrightarrow{OP}\wedge\vec{T}=\vec{a}$, où $\vec{a}$ est constant. Prouver que $\overrightarrow{OP}.\vec{T}=0$; en déduire que $\vec{a}\neq\vec{0}$. Etablir finalement que Γ est un arc de grand cercle.

Tournez la page S.V.P.

3. Caractérisation cinématique des géodésiques.

Soit $t \mapsto P(t)$ un point matériel en mouvement sur Σ. On suppose que P n'est soumis à aucune force autre que la réaction $\vec{R}$ et que le mouvement est sans frottement, c'est-à-dire que $\vec{R}$ est normal à Σ.

a) Prouver que $\frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}$ est normal à la surface.

b) En déduire que le mouvement est uniforme et que la trajectoire Γ est une géodésique de Σ.

4. Recherche des géodésiques d'une surface de révolution.

Dans toute la suite, on suppose que Σ est de révolution autour de l'axe oz, la méridienne de Σ étant définie par une équation cartésienne $z=f(\rho)$, où f est de classe C^∞ et $\rho > 0$. Pour tout nombre réel θ, on pose

$$\vec{I}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{J}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}.$$

La nappe Σ est alors définie par

$$(\rho,\theta) \mapsto \vec{OM}(\rho,\theta) = \rho\vec{I}(\theta) + f(\rho)\vec{k}.$$

Soit Γ un arc tracé sur Σ, régulier à l'ordre 2, défini par $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ de classe C^∞.

a) Déterminer la normale à Σ en un point M. Prouver qu'elle rencontre l'axe de révolution oz.

b) Etablir que, pour tout t,

(1) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\left[1+f'(\rho)^2\right] + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$.

c) On suppose désormais que Γ est parcouru de manière uniforme, c'est-à-dire que $\frac{ds}{dt} = a$, où a est une constante strictement positive. Soient Q la projection orthogonale de P sur le plan Oxy et γ l'arc plan parcouru par Q. Prouver qu'il est équivalent de dire :

- l'arc Γ est une géodésique de Σ.
- Pour tout point P de Γ, $\frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}$ appartient au plan défini par $\vec{OP}$ et $\vec{k}$.
- Pour tout point Q de γ, $\frac{d^2\vec{OQ}}{dt^2}$ est colinéaire à $\vec{OQ}$.

Tournez la page S.V.P.

• Pour tout t, (2) $\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c$, où c est constant.

(on pourra étudier la fonction $\overrightarrow{OQ} \wedge \frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}$).

d) Identifier géométriquement les arcs Γ tels que c=0.

e) On suppose désormais $c \neq 0$. Montrer que θ est un paramètre admissible pour une telle géodésique Γ, et que Γ est alors caractérisée par l'équation différentielle

(3) $(\frac{d\rho}{d\theta})^2 \left[1+f'(\rho)^2\right] + \rho^2 = \frac{1}{k^2} \rho^4$,

où k est une constante strictement positive.

5. Application : géodésiques d'un cône de révolution.

On suppose que Σ est le cône de révolution de sommet O engendré par rotation autour de oz d'une demi-droite faisant un angle α avec oz, où $0<\alpha<\pi/2$.

Soit Γ une géodésique de Σ, régulière à l'ordre 2.

a) Prouver que θ est un paramètre admissible et que Γ est caractérisée par l'équation différentielle (4) $\frac{1}{\sin^2\alpha} (\frac{du}{d\theta})^2 + u^2 = \frac{1}{k^2}$, où $u = \frac{1}{\rho}$.

b) On pose $u = \frac{1}{k} \sin t$ et $\frac{du}{d\theta} = \frac{\sin\alpha}{k} \cos t$, où $0<t<\pi$.

Prouver que $t=(\theta-\theta_0) \sin\alpha$, où θ_0 est constant.

En déduire l'équation polaire de γ.

c) Comment les géodésiques s'obtiennent-elles à partir de Γ_0 définie par sa projection γ_0 d'équation polaire (5) $\rho = \frac{1}{\sin\lambda\theta}$, où $\lambda=\sin\alpha$.

d) Construire γ_0 lorsque $\alpha=\pi/4$.

6. Caractérisation des méridiennes par une propriété de minimum.

Soit C un arc de méridienne d'une surface de révolution Σ, d'origine A_1 et d'extrémité A_2, défini par la représentation paramétrique $\rho \mapsto \overrightarrow{OS}(\rho) = \rho\vec{i} + f(\rho)\vec{k}$, où ρ parcourt $[\rho_1, \rho_2]$, $\rho_1 < \rho_2$.

Soit Δ un arc quelconque tracé sur Σ, régulier à l'ordre 1, d'origine A_1 et d'extrémité A_2, défini par $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$, où t parcourt $[\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1<\alpha_2$ et où $\rho(\alpha_1) = \rho_1$, $\rho(\alpha_2)=\rho_2$, $\theta(\alpha_1)=0$, $\theta(\alpha_2)=0$.

Tournez la page S.V.P.

a) Prouver que les longueurs de C et de Δ sont données par

$$\ell(C)=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+f'(\rho)^2}\,d\rho$$

$$\ell(\Delta)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sqrt{(\frac{d\rho}{dt})^2\left[1+f'(\rho(t))^2\right]+\rho(t)^2(\frac{d\theta}{dt})^2}\,dt.$$

En déduire que, pour tout Δ, $\ell(C)\leq\ell(\Delta)$.

b) Etablir que $\ell(\Delta)=\ell(C)$ si et seulement si Δ coïncide avec C, t étant un paramètre admissible pour C.

Cette caractérisation s'étend en fait à toutes les géodésiques. Nous nous bornerons à l'établir lorsque Σ est un cône de révolution.

7. Caractérisation des géodésiques d'un cône de révolution par une propriété de minimum.

Soit Σ un cône de révolution, paramétré comme il est indiqué dans la question 5.

On pose encore $\lambda=\sin\alpha$ et on prend θ comme paramètre.

On considère la géodésique Γ_0 définie par (5) et deux points A_1 et A_2 de Γ_0 définis par les paramètres θ_1 et θ_2, où $0<\theta_1<\theta_2<\pi$.

On note C l'arc de Γ_0 ainsi défini. Soit Δ un arc quelconque, tracé sur Σ, d'origine A_1 et d'extrémité A_2, défini par $\theta\longmapsto\rho(\theta)$.

a) Soient u et v les fonctions définies sur $[\theta_1,\theta_2]$ par

$$u(\theta)=\rho(\theta)\sin\lambda\theta \text{ et } v(\theta)=\rho(\theta)\cos\lambda\theta.$$

Etablir que, pour tout θ,

$$(\frac{du}{d\theta})^2+(\frac{dv}{d\theta})^2=(\frac{d\rho}{d\theta})^2+\lambda^2\rho^2.$$

b) En déduire que $\ell(\Delta)\geq\ell(C)$, avec égalité si et seulement si Δ et C coïncident.

c) Etant donnés deux points A et B de Σ, montrer qu'il existe une géodésique Γ passant par ces points et établir une propriété de minimum pour $\ell(\Gamma)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail